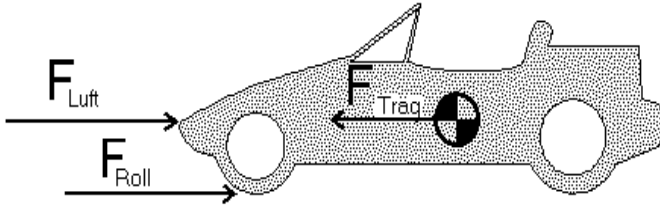


Wie hoch ist der Roll- und Luftwiderstand eines Autos ?

Original s. <http://www.arstechnica.de/index.html>

(Diese Seite bietet außer dieser Aufgabe mehr Interessantes zur Kfz-Technik)

Kann man den Luftwiderstand und den Rollwiderstand eines Autos (und damit vollmundige Werbeversprechen) ohne Windkanal und ohne aufwendige Technik prüfen? Im Prinzip ja! Sehen wir uns dazu einmal die wirkenden Kräfte im Bild an:



Die Theorie

Natürlich gibt es noch weitere Kräfte, z.B. die Reibung in den Radlagern und in Getrieben, die beim Auskuppeln nicht von den Rädern getrennt werden, z.B. Gelenkwellen oder Differentialgetriebe. Aber die folgende Rechnung soll ja nur ein Beispiel geben, wie man den Luftwiderstand berechnen kann. Die Genauigkeit hängt u.a. auch von der verwendeten Messtechnik ab.

Der Luftwiderstand

Glg. 1

$$F_{Luft} = \frac{\rho}{2} * c_w * A * v^2$$

F_{Luft} Luftwiderstandskraft in [N]
 ρ_{Luft} Dichte der Luft, etwa 1,2 [kg/m³]
 c_w Luftwiderstandsbeiwert, dimensionslos
 A Projizierte Stirnfläche des Fahrzeugs in [m²]
 v Fahrgeschwindigkeit in [m/s]

Wie man sieht ist der Luftwiderstand -abgesehen von der Fahrgeschwindigkeit- nur von Werten abhängig, die sich während der Messung nicht ändern.

Beim Rollwiderstand sieht die Gleichung so aus:

Glg. 2

$$F_{Roll} = m_{Fz} * g * k_{Roll}$$

F_{Roll} Rollwiderstandskraft in [N]
 m_{Fz} Fahrzeugmasse in [kg]
 g Erdbeschleunigung, etwa 9,81 m/s²
 k_{Roll} Rollwiderstandsbeiwert, dimensionslos

Für unsere Berechnung wollen wir annehmen, dass nur diese beiden Kräfte das Ausrollen des Fahrzeugs bremsen. Um Rollwiderstand und Luftwiderstand zu bestimmen, ist folgender Versuchsablauf vorgesehen:

- Ein Fahrzeug wird auf eine bestimmte Geschwindigkeit v_0 beschleunigt.
- Sobald die Geschwindigkeit erreicht ist, wird ausgekuppelt, die Fahrgeschwindigkeit v_0 festgehalten (Tacho) und gleichzeitig eine Stoppuhr gestartet.
- In dem Augenblick, in dem das Fahrzeug zum Stillstand kommt, wird die Stoppuhr angehalten und die Zeit t_R festgehalten.
- Der Versuch erfolgt bei Windstille und das Fahrzeug rollt in der Ebene aus.
- Es werden mehrere Versuche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausgeführt.

Unter diesen Randbedingungen lässt sich dann die Differentialgleichung der Bewegung nach Newton ($F = m * a$) aufstellen:

Glg. 3

$$m_{Fz} * a = -F_{Roll} - F_{Luft}$$

a , die Beschleunigung ist nichts anderes als die Änderung der Fahrgeschwindigkeit durch die Reibungskräfte, also $a = dv/dt$. Damit lassen sich alle Größen in die Differentialgleichung (DGL) einsetzen:

$$\text{Glg. 4} \quad m_{Fz} * \frac{dv}{dt} = - \frac{\rho_{Luft} * c_w * A * v^2}{2} - k_{Roll} * m_{Fz} * g$$

Durch m_{Fz} dividiert erhält man:

$$\text{Glg. 5} \quad \frac{dv}{dt} = - \frac{\rho_{Luft} * c_w * A}{2 * m_{Fz}} * v^2 - k_{Roll} * g$$

Um die Gleichung übersichtlicher zu gestalten, werden die konstanten Anteile der Gleichung ersetzt durch

$$\text{Glg. 6} \quad \frac{\rho_{Luft} * c_w * A}{2 * m_{Fz}} = L \quad \text{bzw.}$$

$$\text{Glg. 7} \quad k_{Roll} * g = R \quad \text{und es ergibt sich :}$$

$$\text{Glg. 8} \quad \frac{dv}{dt} = -L * v^2 - R$$

Das ist eine Differenzialgleichung. In einer solchen Gleichung taucht die Funktion auf (in diesem Fall sogar zum Quadrat (v^2)) und die Ableitung der Funktion (dv/dt)! Das Lösen solcher Gleichungen lernt man in einem entsprechendem Studium. Jedenfalls liefert die Lösung nicht die gesuchten Größen für den Luft- bzw. Rollwiderstand, sondern genau die Funktion $v(t)$, die diese Differenzialgleichung erfüllt. Diese Lösung wird hier vorgegeben:

$$\text{Glg. 9} \quad v(t) = \sqrt{\frac{R}{L}} * \tan \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{L}{R}} * v_o \right) - \sqrt{L * R} * t \right]$$

Ersetzt man auch hier alle konstanten Größen durch :

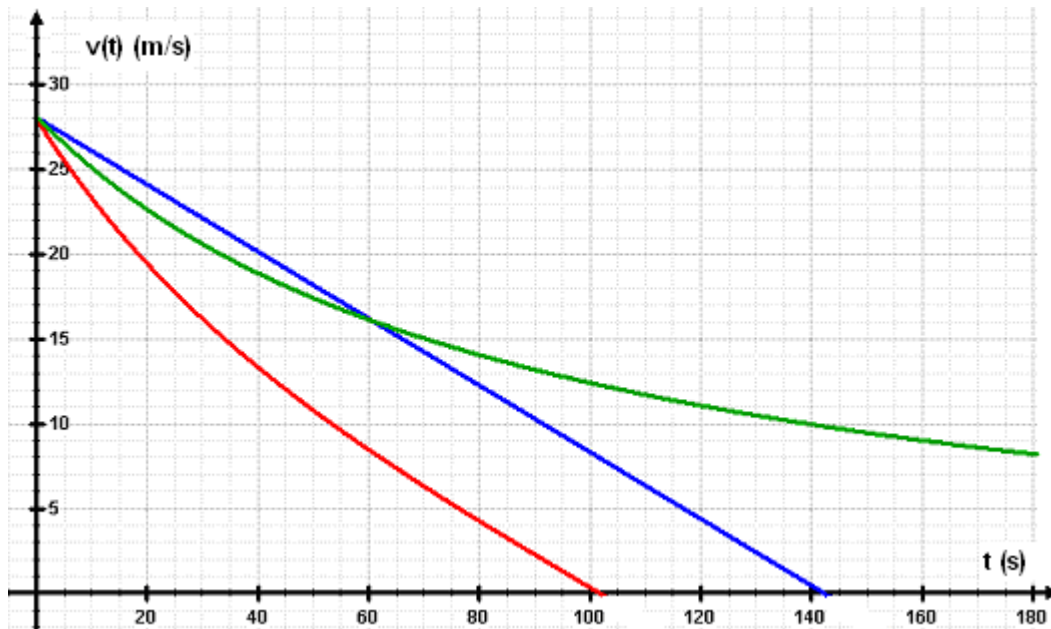
$$\text{Glg. 10} \quad \sqrt{\frac{R}{L}} = a \quad ,$$

$$\text{Glg. 11} \quad \arctan \left(\sqrt{\frac{L}{R}} * v_o \right) = b \quad \text{und}$$

$$\text{Glg. 12} \quad \sqrt{L * R} = c \quad , \quad \text{so wird die Funktion etwas übersichtlicher:}$$

$$\text{Glg. 13} \quad v(t) = a * \tan [b - c * t]$$

Mit dieser Formel und bei gegebenen Werten für ρ_{Luft} , c_w , A , v_o , m_{Fz} , g und k_{Roll} kann man a , b und c bestimmen und weiterhin mit der Funktion $v(t)$ ausrechnen, welche Geschwindigkeit $v(t)$ das Fahrzeug nach einer bestimmten Zeit t noch hat, nachdem es auf v_o beschleunigt wurde und dann ausrollt.



	A	B	C	Einheit
ρ	1,29	1,29	1,29	kg/m ³
c_w	0,3	0,001	0,3	
A	2,2	2,2	2,2	m ²
m	1000	1000	1000	kg
g	9,81	9,81	9,81	m/s ²
k_{Roll}	0,02	0,02	0,001	
v_0	28	28	28	m/s

Die Simulation A berücksichtigt Luftwiderstand und Rollwiderstand.

Die Simulation B berücksichtigt nur den Rollwiderstand, während der c_w -Wert nahezu 0 gesetzt wurde.

Die Simulation C berücksichtigt nur den Luftwiderstand, während der Rollreibungwert μ nahezu 0 gesetzt wurde.

Umgekehrt kann man prinzipiell die Gleichung 13 auch nutzen, um bei gegebenen Wertepaaren $(t; v(t))$, sowie v_0 die Konstanten a , b und c zu berechnen, um daraus die gesuchten Größen für c_w und k_{Roll} zu ermitteln .

Mit den Werten $A=2,2$, $m=1100$, $g=9,81$ und z.B. den 3 Wertepaaren aus einem möglichen Fahrversuch

t (s)	0	20	100
v (m/s)	28	19	0

lassen sich die 3 Gl. aufstellen:

Glg. 14
$$v(0) = a \cdot \tan[b - c \cdot 0] = 28$$

Glg. 15 $v(20) = a * \tan[b - c * 20] = 19$

Glg. 16 $v(100) = a * \tan[b - c * 100] = 0$

Aus Gl 16. folgt, dass

Glg. 17 $b = 100c$

sein muss, da aus $\tan(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (oder $z * \pi$), eben immer da, wo $\sin(x) = 0$ ist. Hier interessiert aber nur die erste NST.

Damit werden die Gl.14 und 15 zu

Glg. 18 $a * \tan[100c] = 28$

Glg. 19 $a * \tan[80c] = 19$, also 2 Gl. mit den beiden Unbekannten a und c.

Durch Division der Glg. 18 durch die Glg. 19 verschwindet der gemeinsame Faktor a und man erhält eine Glg. Mit nur einer Unbekannten, nämlich c:

Glg. 20 $\frac{\tan(100c)}{\tan(80c)} = \frac{28}{19}$

Für diese Gleichung kenne ich kein Standardlösungsverfahren.

1. Vorschlag: Die Solver-Funktion des Taschenrechners (z.B. Sharp EL-W506) nutzen, um die NST von $f(c)$ zu bestimmen. Dieser Versuch führt aber nur mit viel Glück zum Ergebnis, da es nur relativ sehr wenige geeignete Startwerte gibt. (Die Solver-Funktion des TR arbeitet nach dem Newton-Verfahren, um NST zu bestimmen.)
2. Vorschlag : Software Excel nutzen

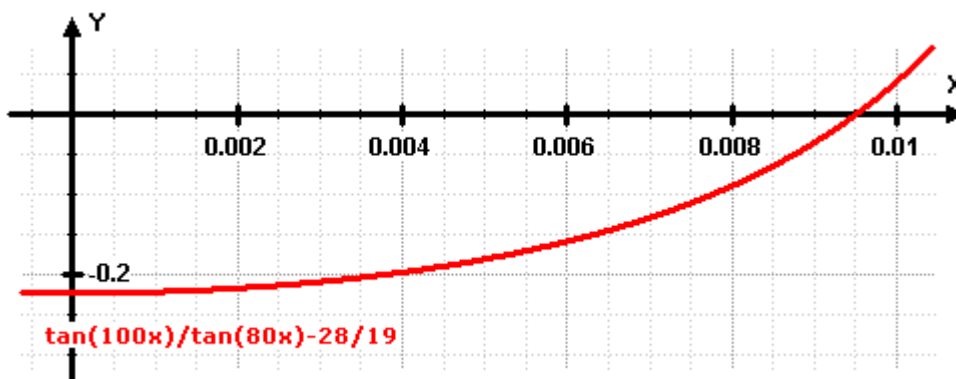
Vorschlag : Software nutzen, die Funktionsgraphen darstellt (z.B. WZGrapher):

Arbeitsschritte:

- * Die Glg. 3. umformen und als Funktion von c auffassen.

Glg. 21 $f(c) = \frac{\tan(100c)}{\tan(80c)} - \frac{28}{19}$

- * Den Graphen $f(c)$ anzeigen lassen.
- * Die NST des Funktionsgraphen ist der gesuchte Wert von c:



Die NST liegt bei $x = 0,009531$. Das ist also der gesuchte Wert c. (Probe mit Taschenrechner)

Der vollständige Graph dieser Funktion sieht ganz interessant aus. Außerdem gibt es natürlich unendlich viele NST, da $f(c)$ eine periodische Funktion ist. Die Abbildung zeigt nur einen kleinen Ausschnitt, nämlich den, mit der 1. positiven NST:

Diese graphische Lösungsmethode ist offenbar die effektivste. Sie führt zu

$$c = 0,009531.$$

Mit Glg. 18 oder 19 lässt sich dann auch der Wert für a bestimmen:

$$a = \frac{28}{\tan[100c]} = \frac{28}{\tan[0,9531]} = 19,89 \quad \text{also}$$

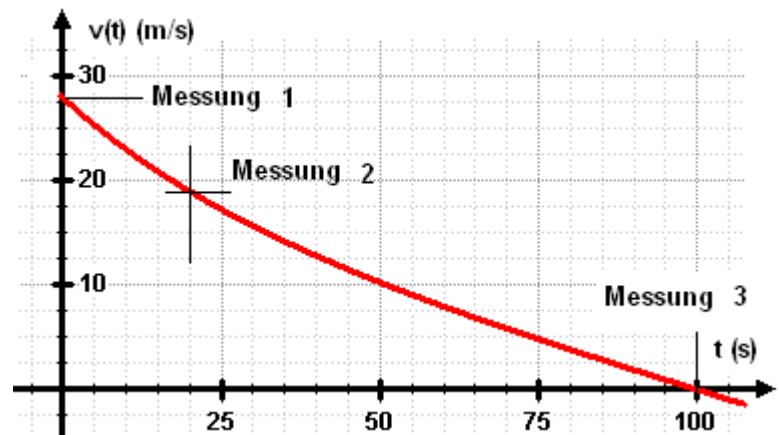
$$a = 19,89$$

Schließlich folgte mit Glg. 14: $b = 100c = 0,9531$,

$$b = 0,9531$$

Nun ist man endlich in der Lage, die konkrete Funktion $v(t)$ (s.Glg. 13) zu notieren, die den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit beim Ausrollen des Fahrzeugs mit den gegebenen Eigenschaften und den aus dem Ausrollversuch gemessenen Werten beschreibt.:

$$v(t) = 19,89 * \tan[0,9531 - 0,009531 * t]$$



Wie kommt man jetzt noch zu den eigentlich gesuchten Werten für c_w und k_{Roll} ?

Mit den Gleichungen 10 und 12 sowie mit den ermittelten Werten von a und c kann man die Größen R und L jeweils bestimmen.

Es ergibt sich :

$$L = 0,0004791$$

und

$$R = 0,1896$$

Mit den Gleichungen 6 und 7 und mit den jetzt bekannten Werten von L und R sowie mit den übrigen gegebenen Größen kann man nun die Größen c_w und k_{Roll} jeweils bestimmen.

Es ergibt sich :

$$c_w = 0,338$$

und

$$k_{Roll} = 0,0193$$

Damit ist die Aufgabe endlich gelöst.

Im Kraftfahrtechnischen Taschenbuch (BOSCH, 23. Aufl. 1999, S. 399) wird ein ähnliches Verfahren beschrieben:

Bestimmung von Luftwiderstands- und Rollwiderstandsbeiwert durch Versuch:

Fahrzeug bei Windstille und ausgeschaltetem Gang auf ebener Straße auslaufen lassen.

Bei einer großen Geschwindigkeit v_1 und einer kleinen Geschwindigkeit v_2 werden für ein Geschwindigkeitsintervall die Ausrollzeiten gemessen und die mittleren Verzögerungen a_1 und a_2 ermittelt.

Rechnungsgang und Beispiel siehe untenstehende Tabelle.

Das Zahlenbeispiel gilt für ein Fahrzeug mit Gewicht $m = 1450$ kg und Querschnitt $A = 2,2$ m².

Diese Methode ist für Fahrgeschwindigkeiten unter 100 km/h anwendbar.

	1. Versuch (große Geschwindigkeit)	2. Versuch (kleine Geschwindigkeit)
Anfangsgeschwindigkeit	$v_{a1} = 60$ km/h	$v_{b1} = 15$ km/h
Endgeschwindigkeit	$v_{a2} = 55$ km/h	$v_{b2} = 10$ km/h
Zeit zwischen v_a und v_b	$t_1 = 6,5$ s	$t_2 = 10,5$ s
mittlere Geschwindigkeit	$v_1 = \frac{v_{a1} + v_{a2}}{2} = 57,5$ km/h	$v_2 = \frac{v_{b1} + v_{b2}}{2} = 12,5$ km/h
mittlere Verzögerung	$a_1 = \frac{v_{a1} - v_{a2}}{t_1} = 0,77$ km/h/s	$a_2 = \frac{v_{b1} - v_{b2}}{t_2} = 0,48$ km/h/s
Luftwiderstandsbeiwert	$c_w = \frac{6m^*(a_1 - a_2)}{A^*(v_1^2 - v_2^2)} = 0,36$	
Rollwiderstandsbeiwert	$k_{Roll} = \frac{28,2^*(a_2 v_1^2 - a_1 v_2^2)}{10^3^*(v_1^2 - v_2^2)} = 0,013$	

Mit den selben Werten wie in der arstechnica Aufgabe

m	1100 kg
A	2,2 m ²
va1	100,8 km/h
va2	68,4 km/h
vb1	68,4 km/h
vb2	0 km/h
t1	20 s
t2	80 s

Ergeben sich folgende Zwischenlösungen und Lösungen :

v1	84,6 km/h
v2	34,2 km/h
a1	1,62 Km/h / s
a2	0,855 Km/h / s
cw	0,38329726
kroll	0,01989679

Ein Vergleich der Lösungen ergibt beim cw-Wert immerhin eine relative Abweichung von ca. 15%. Die von BOSCH angegebene Methode ist ein vereinfachtes Rechenverfahren, dass nach eigenen Angaben zu brauchbaren Ergebnissen führt, wenn die Geschwindigkeit nicht über 100 km/h liegt.

Aufgaben:

Bestimmen Sie durch Versuche und Rechnungen Den Luftwiderstandsbeiwert und den Rollwiderstandsbeiwert Ihres Fahrzeugs.

Ermitteln Sie den Rollwiderstandsbeiwert bei verschiedenen Luftdrücken in den Reifen: Herstellersollwerte / max. zulässiger Reifendruck

Beschreiben Sie den grün gezeichneten Graphen im Diagramm oben ohne Berücksichtigung des Rollwiderstands durch eine Exponentialfunktion.

Warum ergibt sich bei Fz ohne Luftwiderstand ein linearer Verlauf des Graphen $v(t)$ beim Ausrollen?